3.1. Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi

Yapılan ölçülerde çeşitli hatalar sonucunda kaba veya uyuşumsuz ölçüler oluşabilir. Bu hatalara örnek okuma-yazma hatası, yanlış hedefe bakılması, indirgeme de hata yapılması, vb. verilebilir. Kaba hatalar dengeleme modelinin düzeltme denklemleri kurulurken belirlenip ayıklanabilirler. Her uyuşumsuz ölçü kaba hatalı demek değildir. Örneğin çevre koşullarının değişmesi, gözlemcinin yorulması ve dikkatinin azalması, yuvarlatma yapma, ideal parametrik modelden sapmalar vb. nedenlerle ölçülerin bir kısmı diğer ölçülerden ayrı özellik gösterebilir ve kurulan matematik modele uymayabilir. Rasgele ölçü hatalarına çok yakın büyüklükteki böylesi hatalar, ancak dengeleme hesabı sonucunda uygulanan uyuşumsuz ölçülerin testi ile belirlenebilir. Buna göre uyuşumsuz ölçüleri, değişik amaçlarla yapılan ölçüler arasında ölçü kümesinin dağılımına uymayan ölçüler olarak tanımlayabiliriz.

Uyuşumsuzların belirlenmesinde hız ve güvenirlik için ihtiyaç duyulan şey bulunan uyuşumsuzlukların ele alınma şeklidir. İlke olarak bu ölçüler ayrı incelenmelidir. Uyuşumsuz ölçülerin tümü kaba hatalardan kaynaklanan kötü veriler değildir, bazı durumlarda bu ölçüler veri grubu için çok önemli olabilir. Kaba hatalar bazı durumlarda ölçü grubunun kaynağına geri dönülerek düzeltilebilir. Buna örnek olarak iki değerin yanlışlıkla yer değiştirmesi verilebilir. Uyuşumsuz ölçüleri güvenilir ve hızlı bir şekilde belirlemedeki davranış şekli de bir sorudur. Kaba hataların sadece sıklığı ve boyutları, verilerin güvenirliği ile ilgili bilgilerden değerlendirilebilir. Model iyi kurulmuşsa ve verilerin çoğunluk eğilimi ile ilgileniliyorsa ayrıca değerlendirilme yapılmadan uyuşumsuz ölçüler direk veri grubundan çıkarılabilir. Bu durum uyuşumsuz ölçülerin içerebileceği bilgilerden vazgeçilmesi sonucunu doğurur [30].

Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi için bugüne kadar birkaç yaklaşım kullanılmıştır. Uzun yıllardan beridir jeodezik çalışmalarda çok yaygın bir şekilde kullanılan yöntem en küçük kareler yöntemine dayalı geleneksel uyuşumsuz ölçü test yöntemidir. Bu yöntemin bazı dezavantajları nedeniyle son yıllarda Robust Kestirim Testi ile uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi çalışmaları başlamıştır. Son olarak da Fuzzy Mantık ve Küme Teorisi ile uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi fikri ortaya çıkmıştır ve çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

En küçük kareler yöntemi ile geleneksel çözüm yöntemleri, jeodezide yaygın olarak kullanılan parametrik bir yöntemdir. Uygulamalı bilimlerde bu yöntemin tercih edilme nedenleri, basit olması, kurulan fonksiyonel ve stokastik modelin başlangıçtan sona kadar değişmez olmasıdır. Aynı zamanda en küçük kareler yöntemiyle kestirimde de algoritma çok basit ve anlaşılırdır.

En küçük kareler yöntemi kullanılırken şu kabuller yapılmıştır;

- Bütün kaba ve sistematik hatalar veri grubundan çıkarılmıştır.
- Verilerde sadece rasgele hatalar bulunmaktadır ve veriler normal dağılımdadır.

Gerçek ölçülerden bu kabulleri sağlayan durumu elde etmek çok zordur. Bu yöntemin “bütün gözlemler arasından ayıklanabilir kaba hatalı gözlemlerin olasılığının sınır değerini gösteren değer” anlamına gelen kırılma noktası çok küçüktür. EKKY’nin kırılma noktası n ölçü sayısını göstermek üzere 1/n eşitliğiyle verilir. Bu değer EKKY ile kestirimin kaba hatalı gözlemlerin ayıklanmasına karşı duyarlıklı bir yöntem olmadığını, çok az sayıdaki kaba hatalı gözlemlerle bile sağlıklı sonuçlar veremeyeceğini gösterir. EKKY ile çözümde kurulan matematik model gereği; bir gözlemdeki hatayı diğer gözlemlere de yaymaktadır. Bu durumda çözüm sonucunda kaba hatalı olmayan bir gözlem diğer gözlemlerin etkisiyle kaba hatalı yani uyuşumsuz çıkabileceği gibi, kaba hatalı bir gözlem de kaba hatasız yani uyuşumlu iyi bir gözlem olarak görülebilir. Uyuşumsuz gözlemlerin belirlenmesiyle ilgili istatistikte ana hedef uyuşumsuz gözlemlerin diğer gözlemler arasında olabildiğince doğru bir yaklaşımla belirlenebilmesidir [31].

Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi ve ayıklanmasında alternatif bir yöntem Robust (sağlam) İstatistik ve robust kestirim yöntemidir. Robust kestirim, ölçülerin dağılım fonksiyonlarındaki küçük değişimlerden ve kaba hatalardan etkilenmeyen yaklaşık parametrik bir yöntemdir. Robust istatistik ilk olarak Huber tarafından 1964’de açıklanmıştır. Daha sonra bir çok araştırmacının çalışmalarıyla çeşitli yöntem ve kestiriciler geliştirilmiştir. Bu istatistik yöntemi ölçülerdeki kaba hataların varlığı ve bu kaba hataların belirlenmesi gerekliliği nedenleriyle geliştirilmiş ve kullanılmaktadır.

1965 yılında Zadeh ilk olarak belirsizliğin tanımlanması için Fuzzy küme teorisinin kullanılabileceğini açıklamıştır. Fuzzy küme teorisi, tanımlanması güç veya anlamı zor belirsizliklere üyelik derecesi atayarak onları açıklamaya çalışır. Fuzzy küme teorisi ile uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde, ölçünün duyarlığı ve diğer ölçülere göre ölçme planındaki yeri de göz önüne alınarak etkileri derecelendirilir ve uyuşumsuz ölçüler belirlenmeye çalışılır. Bu yöntem EKKY tabanlı parametrik bir yöntemdir fakat verilerin içerdiği bilgiyi incelemeye izin veren bir yapısı vardır.

3.1.1. Geleneksel Çözüm Yöntemleri

İstatistikte parametrik modellerin kullanımı oldukça basittir. Bunun nedeni nitelik bilgileri ve oldukça az sayıda gözlemle veri grubunun tamamının yaklaşık tarifinin sağlanabilmesidir. Ayrıca parametre değerleri ile birlikte gözlenen verilerin genelleştirilmesi ve diğer gözlemlerin stokastik modelini kolayca tarif edebilmeyi ve tamamlamayı sağlar. Veri yoğunlaştırılması yada azaltılması olarak adlandırılan istatistiğin ana amaçlarından birini yerine getirir ve tüm veri grubunun tamamen tarifinde muhtemel teori metotlarının uygulanmasına izin verir. Parametrik model, zayıf yapıda ve zayıf rasgele değişkenler içeren modellerde veri grubunun tüm bilgilerinin ayrılmasına izin verir. Parametrik olmayan istatistikse veriyi tamamen tanımlayacak dağılımlar hakkında hiçbir varsayımda bulunmaz ve verilerin içerdiği bilgiyi ayrıntılı olarak incelemez [32].

Yalnızca gerçeğe bir yaklaşım olan parametrik model teorilerinin inceliği ve güzelliğinin unutulmaması gerekir. Normal dağılımdaki verilerin analizi sınırlar hakkında bilgi verir fakat bu sınırlardan ne kadar uzak olunduğu ya da tahminlerin başarısı konusunda bilgi vermez.

Parametrik modellerde sapmalar 4 ana grupta toplanabilir.

i. Kaba hataların varlığı : Kaba hatalar bazı değerlerin yanlış olduğu durumdur. Buna örnek olarak yanlış kopyalama ve hesap hataları verilebilir.Verilerdeki etkileri rasgele hataların sebep olduğundan daha büyüktür ve bu nedenle sonuçta uyuşumsuz değer olarak alınırlar. Bazı kaba hatalar iyi veriler arasına saklanabilir ve zararsız olabilirler. Bir diğer şekilde, uyuşumsuzluklar geçici olaylara neden olabilir ve verilerin hepsi aynı modele uymayabilir. Uyuşumsuz ölçülerin en belirli olanı ve en çok tartışılanı parametrik modellerden sapmalardır. Bu durumda, yüzdesi az olan ve oldukça yaygın olan büyük ve dikkate alınmamış hataların sonuçları ve istatistiksel analizi tamamen bozabileceği dikkate alınmalıdır.

ii. Gruplama ve yuvarlama : Bütün veriler sadece sınırlı duyarlıktadır. Bu nedenle, veriler kabaca sınıflandırılır, gruplanır ve yuvarlanır. Aynı zamanda ölçümden kaynaklanan küçük sistematik fakat yerel olarak etkin hatalar da olabilir. Bu hatalar göz ardı edilebilir fakat unutulmamalıdır. Bu hataların önemli rol oynadığı birçok durum vardır ve çok kaba sınıflandırılmışlardır.

iii. Her durumda yaklaşıklıklar için model tasarlamak: Büyük hata içermedikleri bilinen oldukça yüksek duyarlıktaki geniş veri grupları hala normal dağılıma tam olarak uymaz. Bu şekildeki veri gruplarının dağılımı normal dağılımdan daha uzun kuyrukludur.

iv. Bağımsız tahminlerin ya da özel korelasyon yapılarını yaklaşık olarak gerçekleştirmek : Çok az bilinen bu problem bağımsız tahminlerin bozulması ya da kuşku duyulmayan seri korelasyonlara karşı sağlamlıktır [30].

v. Tablo 1. Uyuşumsuz ölçülerin geleneksel çözüm yöntemleri

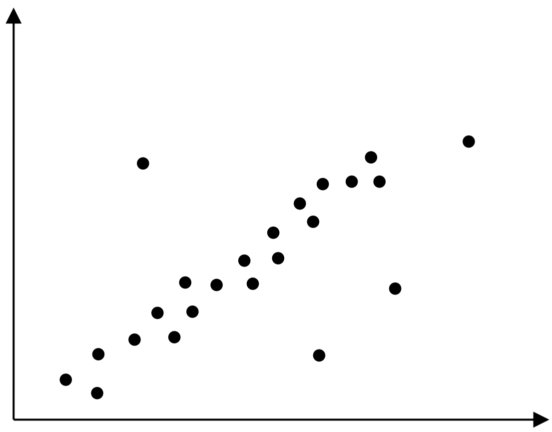
Kullanılan Yöntem	**Varyans Değeri**	**Test Büyüklüğü**		**Test Dağılımı**	**Sınır Değer**
W-Testi Data-Snooping	σ_0^2	$W_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{\sigma_{Vi}}$	$W_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{\sigma_0 \sqrt{q_{ViVi}}}$	$\sim N(0, 1)$	$N_{1-\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,\infty,1-\alpha_0}}$
Tau-Testi	$m_0^2 = \frac{\Omega_0}{f}$	$T_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{m_{Vi}}$	$T_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{m_0 \sqrt{q_{ViVi}}}$	$\sim \tau_{f,1-\alpha_0/2}$	$\tau_{f,1-\alpha_0/2} = \sqrt{\frac{f\, t^2_{f-1,1-\alpha_0/2}}{f-1+t^2_{f-1,1-\alpha_0/2}}}$
t-Testi	$\bar{m}_{01}^2 = \frac{\Omega_0 - R}{f-1}$	$t_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{\bar{m}_{Vi}}$	$t_i = \frac{\lvert V_i \rvert}{\bar{m}_{01} \sqrt{q_{ViVi}}}$	$\sim t_{f-1,1-\alpha_0/2}$	$t_{f-1,1-\alpha_0/2} = \sqrt{F_{1,f-1,1-\alpha_0}}$

3.1.2. Robust İstatistik ve Robust Kestirim Yöntemi

Robust istatistik, teknik olmayan bir ifade ile istatistik biliminde yaygın olarak kullanılan normallik, doğrusallık gibi varsayımların tahminleriyle ilgilenen bir bilim dalıdır. Ölçü grubundaki kaba hatalı ölçüler, ölçü grubunun dağılıma uymazlar ve klasik istatistik yöntemleri için tehlikeli olurlar. Uyuşumsuz ölçüler problemi istatistik kadar eski bir konudur. Klasik istatistik çözüm yöntemlerinde verilerin normal dağılımda olduğu ve kaba ve sistematik hatalardan arındırıldığı kabulleri yapılarak çözüm yapılır. Parametrik model tabanlı klasik istatistik yöntemleri, optimal modeller olarak ele alınırlar fakat yalnızca doğru yaklaşımların yapıldığı durumda doğru sonuç verirler. Bu modeller özellikle veri grubu dağılımının çok küçük ve görülemeyen sapması durumunda oldukça zayıf kalırlar [30], [32].

Robustluk (Sağlamlık) problemi uzun yıllardır bilinmektedir fakat uygulamaya geçmesi oldukça geç olmuştur. Bu istatistik yöntemiyle, klasik olarak kullanılan istatistik yöntemleriyle oldukça zor olarak yapılan geniş ve karmaşık ölçü gruplarının analizi daha kolaylaşmıştır ve bu yöntemle ilgili yapılan yayınlar da çoğalmıştır.

Robustluk problemi ile ilgili çeşitli yaklaşımlar vardır. Bazıları genellemeyi ve sağlamlık fikrini özetlemeyi tercih ederken diğerleri farklı topoloji ve farklı matematiksel yönlerden sağlamlıkla ilgilenir. Gerçek hayatta robustluk probleminin başlıca özelliklerini açıklayan yeni istatistiksel yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bu yaklaşımlar deneysel robustluk probleminin tanımındaki belirsizliklerin daha kolay açıklanmasını sağlarlar. Bu şekilde gelişmeler, sağlamlık yönünden varolan istatistiksel analizleri karşılaştırılması ve değerlendirilmesi durumunu ortaya çıkarmıştır. Sonuç olarak, şimdiye kadar bilinen yöntemlerden daha iyi ve bilinen durumların dışında da kullanılabilen yeni robust kestirim yöntemleri önerilmiş ve geliştirilmiştir [37].



Şekil 16. Model varsayımlarından olan çeşitli sapmalar

Veri analizi pratikte şu gibi sorulara cevap verir: Veriler ve bu verilerden üretilen sonuçlar aynı mı? Yoksa verilerin bir kısmı farklı şeyler mi gösteriyor? Verilerin çoğunluğunun gösterdiği nedir? Hangi azınlık veri farklı ve nasıl davranmaktadır? Son çözümlerde verinin farklı kısımlarının etkisi nasıldır? Son çözümlerde ya da model seçiminde kritik etkili olan veriler hangileridir ve nasıl analiz edilmelidirler? Model ne kadar kaba hatayı ortaya çıkarabilir ya da sonuçları etkilemeden kullanabilir? Hangi model en büyük güveni sağlar ve hangi model güvenli ve verimlidir? Kesin ve kesin olmayan sabitler için güven aralığı nedir? Model kabulleri yaklaşık olarak alınırsa çözümler hangi güvende olurlar? Veri analiziyle bu sorulara cevap aranırken sağlamlık teorisinin analizi de yapılmalıdır.

Robustluk teorisi yalnızca gereksiz ve fazla matematiksel yorumlama değildir. Yönetilebilir istatistiksel yöntemlerin davranışlarıyla ilgili bilgilerin elde edilmesini sağlar.

Özet olarak robust istatistik, idealize edilmiş varsayımlardan sapmaları ve ilişkili modelleri gösteren yaklaşık parametrik model olarak tanımlanabilir. Robust istatistik parametrik model istatistiğine robustluk görüşünü ekleyerek ilaveler yapar ve değişmez parametrik modellerden daha geniş şekilde komşuluk ilişkilerini inceler [32].

Robust istatistiğin ana amaçları;

i. Veri yığınını en uygun yapıda tanımlamak : Parametrik model çözümüyle sonuçlar elde edilir ve uyuşumsuz gözlemler veri grubundan çıkarılırsa kalan verilerden veri grubunun dağılımı elde edilir. Bu durumda bazı yaklaşıklıklar kabul edilerek çözüm yapıldığı için alınan sonuçlar bağımlıdır. Veriler dağılıma uymayan bir kısmı da hala içermektedir. Ayrıca seçilen modelin testi ve uygun modelin seçimi gibi durumlarda parametrik modelin geçerliliğinin de analiz edilmesi gerekir. Geniş bir modelin testinde parametreler sıfıra eşitlenerek kesin olup olmadıkları test edilebilir. Bu şekilde robust test teorisi uygulanır.

ii. Veri noktalarının sapmalarını ya da eğer isteniyorsa daha iyi inceleme için temel sapmayı belirlemek : Robust (sağlam) çözümle bulunan düzeltmeler uyuşumsuz değerleri otomatik olarak göstermeye uygun yapıdadır. Diğer çözüm yöntemlerinde uyuşumsuzluklar birçok veri noktasını etkiler ve düzeltmelerden hesaplanan karesel ortalama hatayı da büyütürler. Küçük ve dengeli veri gruplarında verilerin görsel olarak dikkatlice incelenmesiyle uyuşumsuzlukların belirlenebilmesi hala mümkünken dengesiz, büyük boyutlu ve geniş veri gruplarında bu bilgisayarla yapılmasına rağmen mümkün değildir. Ayrıca uyuşumsuzların analizinde kullanılan bazı kuralların güvensiz olduğu unutulmamalıdır. Bazı durumlarda sadece %10 uyuşumsuzluğa izin verilir ve çok kolay bir şekilde de model kırılabilir.

iii. Çok etkili veri hareket noktalarını belirlemek ve bu noktalar için uyarıda bulunmak : Birçok parametrik model için etkili robust modelleri bulmak mümkünken, veri noktalarının azlığı durumunda bu değişir. Veri grubunun dağılımında farklı bir yerde çıkan gözlem diğerleriyle aynı ağırlıkta alınırsa ya da gözlem uyuşumsuz olarak ele alınıp ağırlıklandırılmazsa sonuçlar bozulur. Bu durumda en uygun çözüm iki robust regresyonu kullanmak ve birinde hareket noktaları olarak adlandırılan bu noktaların ağırlıkları düşük alınarak sonuçları karşılaştırmaktır. Hareket noktalarının tam olarak bilinememesi hala büyük bir problemdir.

iv. Beklenmedik seri korelasyonlar ya da genel korelasyon yapısından oluşan sapmalardan bahsetmek : Robust teorisi dağılım şeklindeki sapmaları inceler. Uyuşumsuzluklar için güven aralığında örnek büyüklükler için test yapılır fakat tam olarak onlardan bahsedilmez. Ayrıca çeşitli bağımsız veri gruplarındaki eğilimlerde analiz edilmelidir. Küçük fakat yüksek korelasyonlu uyuşumsuzlukların analizi çok zordur. Oldukça tehlikeli güven aralığı ve geniş örnekleme tabanlı testlerde toplanırsa yığılma olabilir [30], [32], [38].

Robust istatistik, yaklaşık parametrik model istatistiğidir. Robust istatistik için, istatistikte yaygın olarak kullanılan birçok dağılım modeline göre gerçeğe en yakın yaklaşım olduğu söylenebilir. Bu istatistik yöntemin kullanılmasının nedenleri; veri grubundaki kaba hataların varlığı ve analizi, diğer birçok yöntemin deneysel olması ve yaklaşık parametrik model olmasıdır.

Robust kestirimin uygulanmasındaki en etkin yön, bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkilerin azaltılması hatta yok edilmesidir. Bu kestirim yöntemi ölçü hatalarını diğer ölçülerin düzeltmelerine yaymaz ve küçük hatalardan da çok fazla etkilenmez.

3.1.2.1. Robust Kestirim Yöntemi İle Uyuşumsuz Ölçülerin Belirlenmesi

Herhangi bir büyüklüğün ölçü değeri hem büyüklük hem de çeşitli nedenlerle oluşan hatalarla ilgili bilgi içerir. Ölçülerin geometrik ve fiziksel koşulları da sağlayan gerçek değerlerine yakın büyüklüklerinin hesabında hataların belirlenip ayıklanması büyük bir öneme sahiptir. Ölçü kümelerinde kaçınılmaz olan uyuşumsuzluklar birçok veri noktasını çeşitli şekillerde etkiler ve yapılan istatistik test sonucuna yansırlar. Uygulanan istatistik test sonuçları içerdiği uyuşumsuzlukların tanısında zorlanır. Huber'e göre uyuşumsuz ölçüler ayrı bir kümeden çıkmış veri grubudur. Bu şekildeki bir ölçü grubunun dağılım fonksiyonu,

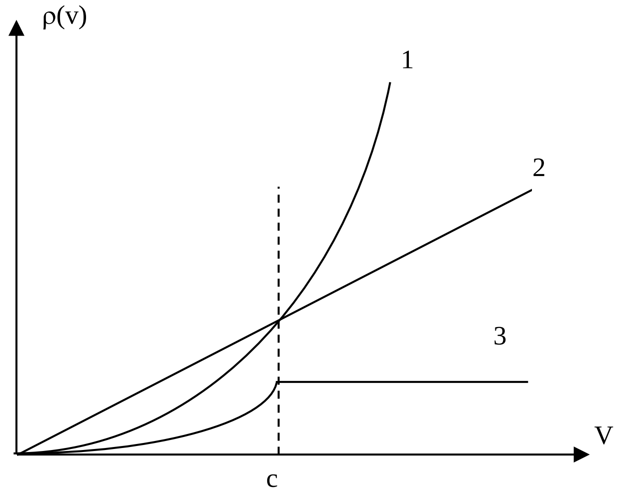
$$F(x) = (1-\varepsilon) F_0(x) + \varepsilon H(x) \tag{88}$$

şeklinde yazılabilir. Burada F(x); tüm ölçülerin dağılım fonksiyonunu, $F_0(x)$; uyuşumlu ölçülerin dağılım fonksiyonunu, H(x); uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonunu, ε ise bozulma derecesini göstermektedir. Uyuşumlu ve uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonları farklı normal dağılımdadır ve μ_i ortalama değerleri ve σ_i^2 varyansları da farklıdır. (88) eşitliğindeki dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = (1-\varepsilon)\,N(\mu_1, \sigma_1^2) + \varepsilon\,N(\mu_2, \sigma_2^2) \qquad (89)$$

şeklinde de yazılabilir [34].

Robustluk kavramı; ölçü kümesindeki küçük değişimlere ya da sapmalara karşı duyarsız bir dağılımdan elde edilen kestirim olarak ele alınabilir. Ölçü kümesindeki herhangi bir elemanın değişiminin bu kümeden kestirilecek değerlere nasıl yansıyacağı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



Şekil 17. Minimumlaştıran çeşitli fonksiyonlar

Şekilde, V_i ölçülere gelen düzeltmeleri, $\rho(v_i)$ ise bu düzeltmelerin fonksiyonunu göstermektedir. Ölçü kümesinde $\rho(v_i)$ fonksiyonunu minimumlaştırmak için bir kısım parametrelerin kestirileceği ve parametrelerin kestirim değerlerinin bulunacağı varsayılmaktadır. Şekildeki fonksiyonlardan (1), V'lere göre oldukça duyarlıdır ve V değerinin artmasıyla $\rho(v)$ fonksiyonu hızla büyümektedir. (2) de ise V'lere göre değişim (1)'den oldukça az olmaktadır. Buradan bu fonksiyonların türevleri alınarak minimumlaştırılmak suretiyle elde edilecek kestirim değerlerinde (2)'nin kestirim değerleri (1)'in kestirim değerlerinden daha robust (sağlam)'dır. (3) fonksiyonu ise en robust fonksiyondur. Bu fonksiyonlar sırasıyla En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY), En Küçük Mutlak Toplam Yöntemi (L_1-norm, EKMT) ve M-Kestirim yöntemidir.

Şekilden de görülebileceği gibi $\rho(v_i) = V_i^2$ toplamlarının minimumlaştırıldığı EKKY kestirimi V ölçü hatalarına karşı oldukça duyarlıdır. Bunun anlamı büyük ölçü hatalarının bu kestirim yöntemiyle elde edilecek kestirim değerlerini çok fazla etkileyeceği ve saptıracağıdır. Bu durumda V'ler daha az duyarlı fonksiyonlarla minimumlaştırılmalı ve kestirim değerleri robust yapılmalıdır. EKKY ile kestirimin olumsuz yönleri daha az duyarlı kestirim yöntemlerinin geliştirilmesine neden olmuştur. Robust kestirimin amacı; kaba hatalı ölçülerden ve bir kısım bozulmuş ölçü kümesinden etkilenmeden sonuç veren güvenilir kestirimler elde etmektir [32], [38].

3.1.2.1.1. Robust Kestiriminin EKKY Çözümü (Maksimum Olasılıklı Kestirim)

Robust kestirimi kısaca "Uyuşumsuz ve sınır değerdeki ölçülerin dağılım fonksiyonunu etkilememesi durumu" şekilde tanımlanabilir. Robust kestirimi, EKKY'nin ağırlıklı iteratif çözümünde kullanılarak etkili sonuçlar elde edilebilir. Bu EKKY'ndeki ağırlıklı karelerin toplamının min. olması yerine düzeltmelerin başka bir fonksiyonunun min. olması durumudur. Robust Kestirim genel bir $\rho(v)$ amaç fonksiyonu minimumlaştırılmaktadır. Bu durumda Robust Kestirim için bu eşitlik şu şekle gelir.

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \, \rho\left(v_i \right) = \min. \qquad (90)$$

Bu eşitlikte $\rho(v_i) = V_i^2$ alınırsa EKKY'nin amaç fonksiyonunun elde edileceği görülmektedir. Buradan EKKY eşitliğinin, (90) eşitliğinin bir özel hali olduğu anlaşılır.

Bir fonksiyonun minimum olması için, bilinmeyenlere göre türev almak ve çıkan fonksiyonu sıfıra eşitleyerek çözüm yapıldığı bilinmektedir. Bu durumda (90) eşitliğinde V_i değerlerine göre türev alınarak bulunan eşitlik sıfıra eşitlenir ve çözüm yapılır. Fakat bu durumda elde edilen eşitlikler doğrusal olmayabilir. Doğrusal olmayan denklem çözümlerinin doğrusal denklem çözümlerinden farkı yinelemeli olmalarıdır. $\rho(v_i) = V_i^2$ amaç fonksiyonuyla elde edilecek çözümden doğrusallaştırma ile elde edilen normal denklemler çözülerek kestirilecek parametreler elde edilir. Bu durumda Robust Kestirim algoritması EKKY algoritmasına indirgenerek çözüm yapılabilir.

Amaç fonksiyonu ya da kayıp fonksiyonu olarak adlandırılan $\rho(v_i)$ fonksiyonunu seçimine göre çeşitli kestirici fonksiyonlar tanımlanmıştır; örnek olarak $\rho(v_i) = | V_i |$ L_1-norm yöntemi verilebilir.

$\rho(v_i)$ fonksiyonunun V_i'ye göre türevi $\psi(v_i)$ ile gösterilir ve bu fonksiyona etki fonksiyonu denir. Sağlam (robust) sonuç elde etmek için etki eğrisi sürekli ve sınırları belirli olmalıdır [40].

Huber (1964), bir dağılımın konu parametresi için Maksimum Likelihood kestiricisinin genelleştiricisi olan M-kestiricisini ortaya çıkarmıştır. Bu kestirim değeri, EKKY ile çözümde kurulan fonksiyonel model dikkate alınarak (31) eşitliğinden,

$$M = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\sum_{j=1}^{u} A_{ij} X_j - \ell_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \rho(V_i) = \text{Min.} \qquad (91)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin çözümünden,

$$A^T \psi(V_i) = A^T \psi(AX - \ell) = 0 \qquad (92)$$

eşitliği yazılabilir. X bilinmeyenlerinin tek ve yakınsak olması için $\rho(.)$ fonksiyonunun konveks (dışbükey), artan ve sürekli yapıda olması gerekir [14].

(92) eşitliğinin çeşitli şekillerde çözümü yapılabilir. Uygulamada en çok kullanılan çözümü ise iteratif çözümdür. Bu çözüm için (92) eşitliği düzenlenirse

$$\frac{\underline{A}^T \psi(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})}{(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})} (\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}) = 0 \text{ ve } W = \underline{W}(v) = \frac{\psi(v)}{\underline{V}} = \frac{\psi(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})}{(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell})} \text{ dönüşümü yapılırsa,}$$

$$\underline{A}^T \underline{W}(v)\underline{V} = \underline{A}^T \underline{W}(\underline{A}\underline{X} - \underline{\ell}) = 0 \qquad (93)$$

eşitliği elde edilir. EKKY'nin normal denklemler çözümüne benzetilerek,

$$\underline{X} = \left(\underline{A}^T \underline{W}\underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W}\underline{\ell} \qquad (94)$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklemin çözümü için W(v) fonksiyonunun yani ρ(v) fonksiyonunun bilinmesi gereklidir. Bu şekilde bilinen bir fonksiyonla iteratif ve yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY ile çözüm,

$$
\begin{aligned}
\underline{X}_t &= \left(\underline{A}^T \underline{W}_t \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W}_t \underline{\ell} \\
\underline{V}_t &= \left[\underline{A}\left(\underline{A}^T \underline{W}_t \underline{A}\right)^{-1} \underline{A}^T \underline{W}_t - \underline{E}\right]\underline{\ell} \\
\underline{W}_t &= \underline{P}\underline{W}_{(t-1)} \qquad t = 1,2,..... \\
\underline{W}(V_0) &= \underline{E}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

şeklindedir. Burada P; ölçülerin başlangıç ağırlık matrisi, t; iterasyon sayısı, $\underline{W} = \underline{W}(v)$ ise seçilen ağırlık fonksiyonudur. Başlangıç için $\underline{W}(v) = \underline{E}$ ve dolayısıyla $\underline{W}_1 = \underline{P}$ alınır. Bu çözüm; EKKY ile yapılan çözümden sonra $\underline{V}$ düzeltmelerinden $\underline{W}$ ağırlık matrisinin belirlenip yeniden iteratif olarak çözüm yapılması olarak özetlenebilir. Sonuçta elde edilen $\underline{X}$ bilinmeyenleri arasındaki fark belli bir sayıdan küçük olunca işleme son verilir [24], [34], [40], [41].

Bu çözümde EKKY çözümü kullanılmıştır fakat bu çözüm (91) eşitliğinde verilen M-kestirim koşulunun sağlanması için yapılmıştır. (95) eşitliğinde yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY kestirimi ile çözümü bulunan Robust M-kestiriminde her ölçü için uygun ağırlıklar belirlenmiş ve robust bir çözüm elde edilmiştir. Bu şekilde oluşturulan EKKY algoritması robust kestirim algoritmasını oluşturmaktadır [42].

Bu şekilde yapılan bir çözüm sonucunda (95)'de verilen eşitliklerde uyuşumlu olan ölçülerin $\underline{X}_t$ bilinmeyenleri ve $\underline{W}_{t+1}$ ağırlıklarının hemen hemen hiç değişmediği, uyuşumsuz sayılan ölçülerin $\underline{W}_{t+1}$ ağırlıklarınınsa giderek küçülmekte ve hatta sıfıra gittiği görülmektedir. Bu durumda uyuşumsuz ölçülerin bilinmeyenler üzerindeki bozucu etkileri de giderek azalmaktadır. Bu robust kestirimin en önemli özelliklerinden birisidir. Bu özellikle uyuşumsuz olup olmadığı konusunda karar verilemeyen ölçülerin analizinde önemlidir.

Robust M-kestirimi şu özellikleri içerir.

1. ρ(.) konveks bir fonksiyondur.
2. Çözüm için ρ(.), ψ(.) ve W(.) fonksiyonlarının birinin bilinmesi yeterlidir.
3. Yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY çözümü ile sonuç bulunur.
4. Her ölçü için uygun robust ağırlık belirlenir.
5. Bu çözüm kaba hatalardan etkilenmez. [24], [38], [43].

3.1.2.1.2. Robust Kestiriminde Kullanılan Kestirici Fonksiyonlar

Yukarıdaki konu başlıklarında anlatılmaya çalışılan EKKY ile klasik test istatistiğinin eksiklik ve belirsizlikleri sonucu ölçü gruplarının analizi için farklı test istatistiği yöntemlerine yönelinmiştir. Robust kestirim yönteminde tanımlanan amaç ya da kayıp fonksiyonu $\rho(.)$, etki fonksiyonu $\psi(.)$ ve ağırlık fonksiyonu W(.) için uygulamada çeşitli fonksiyonlar alınmaktadır. Bu fonksiyonlardan yalnızca birinin belirlenmesi diğerlerinin belirlenmesi ve çözüm için yeterli olmaktadır. Çeşitli kaynaklarda robust kestirim amacıyla kullanılan 70'e yakın fonksiyonun olduğu belirtilmektedir [24], [42]. Kestirici fonksiyonlar, ℓ_i ile X bilinmeyenler ve dengeleme yoluyla belirlenen parametreler arasındaki ilişkiyi ifade ederler.

$$\hat{\ell} = F_i(\ell_1, \ell_2, ..., \ell_n) \qquad (96)$$

F_i kestirici fonksiyonları, ölçüler tam olarak normal dağılıma uymasalar bile, eğer $\hat{\ell}$ 'nin kabul edilebilir bir değerini verirlerse robust özelliğe sahip olurlar.

Robust kestirici fonksiyonları genel olarak R-kestiricileri, L-kestiricileri ve sınıf testlerinden çıkarılan M-kestiricileri olarak sınıflandırılabilir.

R-Kestiricileri : Rank testlerinden çıkarılan kestiricilerdir. Gözlemlerin rankları istatistiksel olarak küçükten büyüğe veya büyükten küçüğe doğru sıralanarak tanımlanabilir. R-kestiricileri, geniş veri yapılarındaki yetersizlikleri ve karmaşıklıklarından ötürü kullanışlı değillerdir. Bu nedenle istatistik kaynaklarında R-kestiricileri ile ilgili geniş bir bilgi yoktur.

L-Kestiricileri : İstatistik kuralların doğrusal kombinasyonuna dayalı L-kestiricileri (Line estimators) robust kestirim yöntemleri arasında daha az öneme sahiptirler. Hesaplama yöntemleri kolay olmasına rağmen etkili çözümler vermemesi, doğrusal programlama veya diğer bazı tekrarlı yöntemlerle çözüme ulaşması, Robust Kestirim algoritmasına uygun olmayışı L-kestiricilerinin kullanılabilirliğini kısıtlamaktadır. L-kestiricileri özellikle konum parametrelerinin belirlenmesi durumunda kullanışlıdır.

M-Kestiricileri : Maksimum olasılık kestiricileri olarak da adlandırılan bu kestiriciler şu şekilde tanımlanır. Ölçüleri ve bilinmeyenleri arasında doğrusal fonksiyonel bir ilişki olan veri grubunun olasılık fonksiyonu olarak $F(\underline{\ell}_i;\underline{X})$ alınırsa,

$$L(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} F(\underline{\ell}_i;\underline{X}) \tag{97}$$

fonksiyonunu en büyük veya eşit olarak,

$$\mathrm{Log}L(\underline{X}) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Log}\,F(\underline{\ell}_i;\underline{X}) \tag{98}$$

$$\rho(\underline{\ell}_i;\underline{X}) = -\mathrm{Log}\,F(\underline{\ell}_i;\underline{X})$$

olmak üzere

$$\mathrm{Log}L(\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\underline{\ell}_i;\underline{X}) \tag{99}$$

şeklinde tanımlanan (99) eşitliğini en küçük yapan $\underline{X}$ çözümü aranır. Huber'e göre (98) eşitlikleri, bilinmeyenleri ve ölçüleri arasında doğrusal fonksiyonel bir ilişki olan veri grupları için şu şekilde genelleştirilir.

$$M = \sum_{i=1}^{n} \rho(\underline{\ell}_i;\underline{X}) = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\sum_{i=1}^{n} A_{ij}X_j - \ell_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \rho(\underline{V}_i) = \min. \tag{100}$$

Burada $\rho(.)$; sıfır noktasında minimum olan düzeltmelerin bir fonksiyonudur. M-kestiriminde $\rho(.)$ fonksiyonunun seçilmesi ölçülerin $F(\underline{\ell})$ olasılık fonksiyonunun seçilmesi anlamına gelmektedir ve bu ilişki (98) eşitliğinden,

$$F(\underline{\ell}_i;\underline{X}) = e^{-\rho(\underline{\ell}_i;\underline{X})} \tag{101}$$

ile gösterilir.

Özetle Maksimum Likelihood kestirimi veya M-kestiriminde amaç, amaç fonksiyonunun minimum yapılmasına karşılık, L($\underline{X}$) 'i maksimum yapmaktır.

Bir kestirim yönteminin, kayık olmamak, etkili olmak ve tutarlı olmak özelliklerine sahip olması gerektiği göz önünde tutularak, kestirim yöntemleri arasında bir seçim ise hesaplanması kolay, kırılma noktası yeterince yüksek, karesel ortalama hatayı büyütmemesi gibi kriterleri de dikkate alınarak yapılabilir.

M-kestiricileri EKKY tekniklerini uygulamaları ve kestirim yöntemlerinin genel özelliklerini sağlayabildikleri için genellikle daha çok kullanılan ve tercih edilen kestiricilerdir. Bu nedenle istatistik kaynaklarda özellikle M-kestiricileri üzerinde durulmuştur[24], [26].

Tablo 2'de uygulamada sıklıkla kullanılan Robust Kestirim fonksiyonları verilmiştir [24], [42].

Bu tablodaki robust kestirim fonksiyonlarına bakılırsa ağırlık fonksiyonlarının genel olarak iki şekilde ortaya çıktığı görülebilir.

- Tüm V_i'ler için tanımlı fonksiyonlar,
- Birden fazla bölge için tanımlı fonksiyonlar.

Tablo 2. Robust kestirim fonksiyonları

Yöntem	**Sınır**	**Amaç Fonksiyonu** $\rho(V)$	**Kestirim Fonksiyonu** $\psi(V)=\rho'(V)$	**Ağırlık Fonksiyonu** $W(V)=\frac{\psi(V)}{\lvert V\rvert}$
K **EKKY**		$\frac{1}{2}V^2$	V	1
H **Huber**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{1}{2}V^2$	V	1
	$\lvert V\rvert > c$	$c\lvert V\rvert - \frac{1}{2}c^2$	c	$\frac{c}{\lvert V\rvert}$
A **Andrews**	$\lvert V\rvert \le c\Pi$	$c^2\left(1-\mathrm{Cos}\frac{\lvert V\rvert}{c}\right)$	$c\,\mathrm{Sin}\frac{\lvert V\rvert}{c}$	$\left(\frac{\lvert V\rvert}{c}\right)^{-1}\mathrm{Sin}\frac{\lvert V\rvert}{c}$
	$\lvert V\rvert > c\Pi$	$2c^2$	0	0
B **Beaton-Tukey**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{c^2}{6}\left(1-\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^3\right)$	$\lvert V\rvert\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^2$	$\left(1-\left(\frac{V}{c}\right)^2\right)^2$
	$\lvert V\rvert > c$	$\frac{1}{6}c^2$	0	0
D **Danimarka**	$\lvert V\rvert \le c$	$\frac{1}{2}V^2$	V	1
	$\lvert V\rvert > c$	$-\left(c^2+c\lvert V\rvert\right)e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$	$\lvert V\rvert e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$	$e^{\frac{-\lvert V\rvert}{c}}$
T **EKMT**		$\lvert V\rvert$	1	$\frac{1}{\lvert V\rvert}$

Robust kestiriminde veri grubundaki gözlemlerin ağırlıkları en uygun şekilde belirlenmekte ve veri grubundan gözlem çıkarılmaksızın bilinmeyenlerin çözümü yapılmaktadır. Seçilen ağırlık fonksiyonlarının şu özelliklere sahip olması istenir.

- Sınır değerden küçük $\underline{V}_i$'ler için bu ağırlık 1 dolayında olsun,
- Sınır değerden büyük $\underline{V}_i$'ler için de ağırlıklar V_i ile ters orantılı birdenbire küçülsün,
- Sınır değerden biraz büyük $\underline{V}_i$ değerleri için ağırlık 0.60 ile 0.70 dolayında olsun. [38].

Robust kestirim yöntemleri algoritmalarında yakınsama, seçilecek ağırlık fonksiyonuyla yakından ilgili olmakla birlikte, problemin türüne, kondisyonuna, kaba hataların sayısına, büyüklüğüne ve dağılımına da bağlıdır. Aynı zamanda ikinci grup ağırlık fonksiyonlarında sınır değer olarak seçilen bir "c" parametresi kullanılmaktadır. "c" sınır değeri için gerçekçi değerlerin alınması daha sağlıklı sonuçlar elde etmek için önemlidir [24].

Robust kestirici fonksiyonlarını kullanan çok değişik yöntemler vardır. Burada jeodezik amaçlar için uygulanabilir görünen ve iyi bilinen yöntemler tanıtılacaktır.